数理解析研究所講究録
567巻 1985年 59-72



# Transfer theorem for SG at odd prime

広島大学理学部 南範彦 (Norihiko Minami)

## §0. 主定理の statement 及びその周辺.

Kahn-Priddy theorem の有効性は、西田 nilpotency の proof 等により、今や専門家なら誰の目にも明らかであろう. この Kahn-Priddy theorem は、$Q_0S^0 (\subset \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Q_iS^0 = QS^0)$ の infinite loop structure に関するものであった:

**Kahn-Priddy theorem ([KP3] 1972)**

任意の素数 $p$ に対し、次の合成写像

$$QB\Sigma_p \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_pS^0 \xrightarrow{Q(*[-p])} QQ_0S^0 \xrightarrow{Str.} Q_0S^0$$

は、$p$ で局所化した時、右 homotopy 逆元を持つ. ここで、$B\text{-}K\text{-}P: B\Sigma_n \to Q_nS^0$ は、Barratt-Kahn-Priddy map ([KP1]), $*[-n]$ は $Q_{-n}S^0$ の基点 $[-n]$ との loop 積, str. は、$Q_0S^0$ の infinite loop structure による巻き戻し. (§.1 も参照して下さい.)

一方、$QS^0 (= \coprod_i Q_iS^0)$ には、$Q_0S^0$ よりも rich な情報

を含んでいると思われて来た(?)別の infinite loop space $SG$ $(=Q_1S^0)$ が含まれているが、これに対し、Priddyは次のような、$SG$の infinite loop structure に関する transfer theorem を得た。

<u>Priddyの theorem ([P] 1977)</u>

$$QB\Sigma_2\wr\Sigma_2 \to QB\Sigma_4 \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_4S^0 \xrightarrow{Q(*[-3])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、2で局所化した時、右ホモトピー逆元を持つ。ここでStr. は、$SG$ の infinite loop structureによる巻き戻し。

このことから次の☆が成り立つと予想することは、自然であろう。

☆　$p$を任意の奇素数とする時、次の合成写像

$$QB\Sigma_p\wr\Sigma_p \to QB\Sigma_{p^2} \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_{p^2}S^0 \xrightarrow{Q(*[1-p^2])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、$p$で局所化した時、右homotopy逆元を持つか?　ここでstr.は$SG$ の infinite loop structure による巻き戻し。

実際、我々の主定理は、

<u>主定理</u>　☆は正しい。

今年が1985年であるから、Priddyの結果から意外と月日が経ったものである。☆に関して、J.P. MayがL.N.M. 741, p.633において「$H_*(SG)$のDyer-Lashof operationについての土屋の結果には、計算のgapがあるので、Priddyがやったようにhomologyの計算で☆を解くのは、更に一層の困難があるだろう.」と述べているが、我々はこの困難な(というより面倒くさい)計算の方法で解くのである。$p=2$の場合と比べて$p$: oddの場合は状況がより一層複雑になるので、土屋の結果をよりsharpにした結果が必要となる(§3を見て下さい)。土屋の結果に関しては、土屋先生に会って実際に窺った所、当時、土屋先生の頭の中には、確かに完全な証明が存在していたという事なので、以後、土屋の定理と呼ぶこととする。

## §1. $QS^0$のtopology(復習)

$QS^0$は$\varinjlim_n \Omega^n S^n$として定義されたから、(sphereからsphereへの写像としての) degree $i$-componentを$Q_iS^0$と置けば $QS^0=\coprod_{i\in\mathbb{Z}} Q_iS^0$ が成立する。一方、$QS^0$には標準的な積が2つ存在する：即ち loop product $*: QS^0\times QS^0\to QS^0$ と composition product $\circ: QS^0\times QS^0\to QS^0$ とである。各々は、

$$*: Q_iS^0\times Q_jS^0\to Q_{i+j}S^0, \qquad \circ: Q_iS^0\times Q_jS^0\to Q_{ij}S^0.$$

を満たし、$Q_0S^0$, $SG(=Q_1S^0)$ は各々、$*$ と $\circ$ を積とする $H$ 空間となる。

ここで、有限群 $G$ の Burnside ring $A(G)$ を思い起こそう。$A(G)$ は finite $G$-set の圏から構成した Grothendieck ring で、和は disjoint union により、そして積は Cartesian product により誘導された。$A(G)$ は Segal map を通して、$QS^0$ と関係を持つのである：$S$ を finite $G$-set とすると、群の準同型 $G\to\Sigma_{|S|}$ が与えられるので、これと Barratt-Kahn-Priddy map を用いて、写像 $\alpha(S): BG\to B\Sigma_{|S|}\xrightarrow{B\text{-}K\text{-}P} Q_{|S|}S^0\hookrightarrow QS^0$ を得る。この構成を $A(G)$ 全体に拡張した写像 $\alpha: A(G)\to[BG,QS^0]$ が Segal-map である。($\alpha$ は同型写像 $\hat{\alpha}: \varprojlim_n A(G)/I(G)^n\to[BG,QS^0]$ を誘導するか？というのが Segal 予想であって、Carlsson 等により解かれたが、我々はこの結果は用いない。) 重要なのは、次の可換図式が存在することである：

(図 I)

$$\begin{tikzcd}
BG \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\alpha(S+T)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & BG\times BG \arrow[d, "\alpha(S)\times\alpha(T)"] \\
QS^0 & QS^0\times QS^0 \arrow[l, "*"]
\end{tikzcd}$$

(図 II)

$$\begin{tikzcd}
BG \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\alpha(S\times T)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & BG\times BG \arrow[d, "\alpha(S)\times\alpha(T)"] \\
QS^0 & QS^0\times QS^0 \arrow[l, "\circ"]
\end{tikzcd}$$

ここで、$\Delta$ は diagonal, $S, T$ は $A(G)^\wedge(=\varprojlim_n A(G)/I(G)^n$, $I(G)$ は $A(G)$ の augmentation ideal) の任意の元であり、$S+T$ と $S\times T$ は各々、

$A(G)^\wedge$での和と積を表わす.

さて、§.0で述べたように、我々の証明はhomology calculationを用いるものであるから、関連するhomologyについて述べよう(すべてのhomologyは$\mathbb{Z}/p$ coefficientとする).

$e_i : H_i(B\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p$の生成元.

$x_0 = 1, x_1, x_2, \cdots\cdots : H_*(X)$のbasis

とすると、$H_*(E\mathbb{Z}/p \underset{\mathbb{Z}/p}{\times} X^p)$の$\mathbb{Z}/p$ basisは.

$$e_i \int x_j = e_i \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_j = e_i \otimes x_j^p \quad (i, j \geqq 0)$$

$$x_{i_1} | \cdots | x_{i_p} = e_0 \otimes x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \quad (i_k \neq i_\ell \text{ for some } k, \ell)$$

$(i_1, \cdots, i_p)$は巡回置換による各代表類を走る.

によって与えられる. 特に、$X = BH$とすると、$E\mathbb{Z}/p \underset{\mathbb{Z}/p}{\times} (BH)^p = B(\mathbb{Z}/p \int H)$となることに注意し、群$S(p^k, p) = \underbrace{\mathbb{Z}/p \int \cdots \int \mathbb{Z}/p}_{k個}$のホモロジーの元を次のように与える:

非負整数列$I = (i_1, \cdots, i_k)$に対し.

$$\hat{e}_I := e_{i_1} \int e_{i_2} \int \cdots \int e_{i_k} \in H_*(BS(p^k, p))$$

ここで、$S(p^k, p)$は$\Sigma_{p^k}$の$p$-Sylow部分群であり. $i : BS(p^k, p) \to B\Sigma_{p^k}$をそれから誘導される写像とし.

$$e_I := i_*(\hat{e}_I) \in H_*(B\Sigma_{p^k})$$

とおく.

今度はDyer-Lashof operationについて復習しよう. $X$をinfinite loop spaceとする時. Dyer-Lashofは適当な条

件を満たした写像たち $\theta_n : E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} X^n \longrightarrow X$ を構成し、

$$Q_i(x) = \theta_{pn}(e_i \int x) \in H_*(X)$$

を考察した。この作用素 $Q_i$ は Dyer-Lashof operation と呼ばれ、$p=2$ の場合の Kudo-Araki operation の $p$: odd case への拡張となっている。勿論、我々は $Q_0S^0$ や $SG$ に関する Dyer-Lashof（各々、$Q_i$, $\widetilde{Q}_i$ と書く）を知りたいのであるが、これらを考える時には全体の $QS^0$ で考えた方が良い（[II]）即ち、Dyer-Lashof map を拡張する写像たち

$$\begin{tikzcd} E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (QS^0)^n \arrow[r, "\theta_n"] & QS^0 \\ E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (Q_iS^0)^n \arrow[r] \arrow[u, hook] & Q_{ni}S^0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (QS^0)^n \arrow[r, "\widehat{\theta}_n"] & QS^0 \\ E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} (Q_iS^0)^n \arrow[r] \arrow[u, hook] & Q_{i^n}S^0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

が存在し、これによって、Dyer-Lashof operation の定義域も $H_*(QS^0)$ 全体へと拡張される。

<u>定義</u> 非負整数列 $I=(i_1, \cdots, i_k)$ が次の (i)(ii)(iii) を満たす時 <u>admissible</u>, (ii)(iii) を満たす時 <u>weakly admissible</u> と呼ぶ。

(i) $i_j > 0$ $(j=1,2,\cdots,k)$

(ii) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$

(iii) (a) $i_t \equiv 0$ or $-1$ mod $2(p-1)$ if the dimension of $e_{i_{t+1}} \int \cdots \int e_{i_k}$ is even,

(b) $i_t \equiv p-1$ or $p-2$ mod $2(p-1)$ if the dimension of $e_{i_{t+1}} \int \cdots \int e_{i_k}$ is odd.

<u>定義</u> 各元が次数を持った集合 $X$ に対し、<u>$X$ で生成される free commutative ($\mathbb{Z}_p$) algebra $AX$</u> とは、$p=2$ の時、$P[X]$:

多項式環．$p>2$ の時，$E[X^-]\otimes P[X^+]$，$X^+, X^-$ は各々．$X$ の次数が偶数の部分と，奇数の部分とであり，$E[X^-]$ は外積代数．

$I=(i_1,\cdots,i_k)$ の長さ $l(I)$ を $k$ と置く．すると我々は．$H_*(Q_0S^0)$ と．$H_*(SG)$ の Pontryagin ring structure を書き下せる．

Dyer-Lashof [M] $I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対し．

$e_I = Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_k}[1]*[-p^{l(I)}]\in H_*(Q_0S^0)$ と置けば．

$$H_*(Q_0S^0)\cong A\{e_I \mid I:\text{admissible}\}$$

土屋 [Ts], May [M] $p$：奇素数とする．$I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対し．

$x_I = Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_k}[1]*[1-p^{l(I)}]\in H_*(SG)$ と置けば．

$$H_*(SG)\cong A\{x_I \mid I:\text{admissible}\}$$

§1の終りに，対称群とその部分群の homology に関するいくつかの結果を並べておく．これらは例えば，[KP2] にある．

Adem [ ] $i: S(p^k,p)\to \Sigma_{p^k}$ を inclusion とすると，任意の非負整数列 $J$ に対し．

$$i_*\hat{e}_J=\sum \lambda_I e_I.$$

ここで $\lambda_I\in \mathbb{Z}/p$ で，$I$ は $l(I)=l(J)$ なる weakly admissible sequence を走る．

補題 [KP2]（これは．well-know でまた，難かしくない！）

i) $j:(\mathbb{Z}/p)^k\to S(p^k,p)$ を（標準的な）inclusion とすると，任意の非負整数列 $I$ に対し．$j_*(x_I)=\hat{e}_I$ なる $x_I\in H_*(B(\mathbb{Z}/p)^k)$ が存在する．

ii) 任意の $x\in H_*(B(\mathbb{Z}/p)^k)$ に対し．$j_*(x)$ は $\hat{e}_I$，$l(I)=k$ 達の線形結合で書ける．

<u>Kahn-Priddy [KP2]</u> 自然な写像 $\Sigma_m\times\Sigma_n\to\Sigma_{m+n}$ から誘導される homology の paring を $*$ で表わす.(これらは Barratt-Kahn-Priddy map を通して $QS^0$ における loop 積 $*$ と両立する). すると、任意の $x=e_{i_1}*\cdots*e_{i_u}*e_{I_1}*\cdots*e_{I_v}\in H_*\Sigma_n$, $i_j\geqq 0$, $l(I_j)\geqq 2$ に対し、

(i) $tr_{\Sigma_n\to S(n,p)}(x)=\hat{e}_{i_1}|\cdots|\hat{e}_{i_u}|\hat{e}_{I_1}|\cdots|\hat{e}_{I_v}+\hat{e}_x$

ここで $\hat{e}_x=\sum\hat{e}_{i_1'}|\cdots|\hat{e}_{i_u'}|\hat{e}_{I_1'}|\cdots|\hat{e}_{I_v'}$ の summation は、$l(I_j')=l(I_j)$ となる示されている type の元及びそれらの置換 ($|$ に関する) の中を走る.

(ii) $i_{S(n,p)\to\Sigma_n}(\hat{e}_x)=(\lambda-1)x$ ここで $\lambda=[\Sigma_n:S(n,p)]$.

ただし、$S(n,p)$ は $\Sigma_n$ の $p$-Sylow で, $tr_{\Sigma_n\to S(n,p)}$, $i_{S(n,p)\to\Sigma_n}$ は、各々 transfer と、"包含"写像である.

## §2 主定理の証明の方針及び、若干の homology calculation.

我々が、homology calculation で何を示せば良いかと言うと、それは次の目標を示すことである.

<u>目標</u> stable map の合成写像 $\Sigma^\infty B\Sigma_{p^k}\xrightarrow{\tau}\Sigma^\infty B(\Sigma_{p^{k-1}}\int\Sigma_p)\xrightarrow{d}\Sigma^\infty SG$ は homology において、$k$ と共に増加するある range で surjective となっていることを示せ! ただし、$\tau=\Sigma^\infty\beta\circ\Sigma^\infty u\circ tr$, $d=\Sigma^\infty(Str\cdot Q(\text{内部積})\circ BKP)$ (つまり主定理の合成写像を stable にしたもの). で、$tr:\Sigma^\infty B\Sigma_{p^k}\to\Sigma^\infty BS(p^k,p)$ は transfer, $u:BS(p^k,p)\to B\Sigma_{p^{k-2}}\int\Sigma_p\int\Sigma_p$

は inclusion. $\beta: B\Sigma_{p^{k-2}}\int\Sigma_p\int\Sigma_p = E\Sigma_{p^{k-2}} \underset{\Sigma_{p^{k-2}}}{\times} (B\Sigma_p\int\Sigma_p)^{p^{k-2}}$
$\to Q\,B\Sigma_p\int\Sigma_p$ は $Q\,B\Sigma_p\int\Sigma_p$ の Dyer-Lashof map の制限.

何故目標が達成されたら主定理が証明されるかについては、(可成り standard な議論となって来たが)、$p=2$ の時の Priddy の論文[P] でも参照して下さい。 さて、$I \subset H_*(SG)$ を $H_*(SG)$ の positive dimension の元全体、$B \subset H_*(SG) \cong A\{x_I \mid I:$ admissible$\}$ を $\{x_I \mid I:\text{admissible}, \ell(I) \geqq 2\}$ で生成される ideal. $\xi: H_*(SG) \to H_*(SG)$, $\xi(x) = x^p$ を Frobenius 写像とする.

補題A (i) $2 \leqq a \leqq p$ の時、

$$x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_a} + \sum_{\ell(I)=a} x_I \quad \text{modulo } I \cdot B \cup I^{a+1}.$$

(ii) $\overbrace{x_i * \cdots * x_i}^{p\text{個}} * [1-p] \equiv x_i^p \quad$ modulo $\xi(B)$

(iii) ((ii)の拡張である) $x_{(\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{個}}, i_1,\cdots,i_k)} \equiv x_{(i_1,\cdots,i_k)}^{p^n} \quad$ modulo $\xi(B)$

補題B (refined 土屋 theorem) $\ell(I) \geqq 2$ とすると、

$$\widetilde{Q}_r(x_I) \equiv x_{(r,I)} + \sum_{\ell(J)=\ell(I)} a_J x_J \quad \text{modulo } \xi(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B$$

ここで、$a_J \in \mathbb{Z}/p$.

系. $I = (J, K)$ $\ell(K) = 2$ とすると.

$$\widetilde{Q}_J(x_K) \equiv x_I + \sum_{2 \leqq \ell(I') < \ell(I)} b_{I'} x_{I'} \quad \text{modulo } \xi(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B$$

ここで、$b_{I'} \in \mathbb{Z}/p$

注意. 元来の土屋の定理[土2]では. indeterminacy が. $I^2$となっていた、我々の目的には不十分であるが、土屋先生の本来の目的は. $H_*(SG) \cong A\left[\{x_I \mid I : \text{admissible}\ l(I) \leqq 2\} \cup \{\hat{Q}_J(x_K) \mid (J, K) : \text{admissible},\ l(J) \geqq 1,\ l(K) = 2\}\right]$ 及び. $H_*(BSG) \cong A\left[\{\sigma(x_I) \mid I : \text{admissible},\ l(I) \leqq 2\} \cup \{\hat{Q}_J(\sigma x_K) \mid (J, K) : \text{admissible},\ l(J) \geqq 1,\ l(K) = 2\}\right]$ を示すことであったので. それには全く十分であった[土2]. 特にこの最後の$H_*(BSG)$に関する結果は、BSGの(homology)特性類を. BSGのinfinite loop structureに関するDyer-Lashof operation $\hat{Q}_i$を用いて表示してあるということで、大変意義深く. $p=2$の場合のMadsenの定理[ ]に対応するものである.

補題A. 補題Bを仮定して目的標達成へのあら筋.

最初に$H_*(SG)$にfiltrationを入れよう. $i_1, \cdots, i_a, I_1, \cdots I_n$がすべてadmissibleであるような単項式$x_{i_1} \cdots x_{i_a} x_{I_1} \cdots x_{I_n}$に対し、$f(x_{i_1} \cdots x_{i_a} x_{I_1} \cdots x_{I_n}) = a + pn$と置き. $x = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j x_{j,1} \cdots x_{j,a_j} x_{I_{j,1}} \cdots x_{I_{j,n_j}}$に対しては. $f(x) = \operatorname{Min}_j f(x_{j,1} \cdots x_{j,a_j} x_{I_{j,1}} \cdots x_{I_{j,n_j}})$としてweightを入れ. このweightに関して. filtration $\{F_l\}$. $F_l = \{u \in H_*(SG) \mid f(u) \geqq l\}$を考える. $H_*(SG) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_l \supset \cdots$であり. $\forall n, \exists l_n$ s.t. $H_n(SG) \cap F_{l_n} = 0$だから. 群の準同型 $f : G \to H_n(SG)$が全射であることを言うには. $\forall x \in H_n(SG), \exists g \in G$. s.t. $x \equiv f(g)$ modulo $F_{f(x)+1}$を言えばよい. このfiltration

に関して補題A, Bを見直すと、次のようになる。

(イ) $2 \leqq a \leqq p$ の時、$x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_a} + \sum_{\ell(I)=a} x_I$
modulo $F_{f(x_{i_1} \cdots x_{i_a})+1}$、ここで $f(x_{i_1} \cdots x_{i_a}) = a \leq p = f(x_I)$

(ロ) $\overbrace{x_i * \cdots * x_i}^{p} * [1-p] \equiv x_i^p$ modulo $F_{p^2}$、ここで $f(x_i^p) = p$

(ハ) $x_{(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n\text{個}}, i_1, \cdots, i_k)} \equiv x_{(i_1, \cdots, i_k)}^{p^n}$ modulo $F_{p^2}$

(ニ) $I = (J, K)$, $\ell(K) = 2$ に対して

$$\widetilde{Q}_J(x_K) \equiv x_I + \sum_{2 \leq \ell(I') < \ell(I)} b_{I'} x_{I'} + \sum c_i x_i^p \quad \text{modulo } F_{p+1},$$

ここで $c_i \in \mathbb{Z}/p$, $f(x_I) = f(x_{I'}) = f(x_i^p) = p$.

さて、例えば $x = x_{i_1} \cdots x_{i_{kp}} x_{I_1} \cdots x_{I_\ell} x_{I_{\ell+1}} \cdots x_{I_{\ell+m}}$ の場合に、どうすればよいか考えてみよう。ここで、$\ell(I_j) = 2$ for $1 \leq j \leq \ell$
$\ell(I_j) > 2$ for $\ell+1 \leqq j \leq \ell+m$ である。すると§1の最後の Kahn-Priddy
$(I_{\ell+q} = (J_q, K_q), \ell(K_q) = 2$ とおく$)$
の結果を用いることにより、

$$d_* \tau_*(e) = (d \circ \Sigma^\infty \beta \circ \Sigma^\infty \nu)_* h'_*(e)$$

$$= (d \circ \Sigma^\infty \beta \circ \Sigma^\infty \nu)_* (\hat{e}_{i_1} | \cdots | \hat{e}_{i_{kp}} | \hat{e}_{I_1} | \cdots | \hat{e}_{I_\ell} | \hat{e}_{I_{\ell+1}} | \cdots | \hat{e}_{I_{\ell+m}} +$$
$$\sum \hat{e}_{i_1} | \cdots | \hat{e}_{i_{kp}} | \hat{e}_{I'_1} | \cdots | \hat{e}_{I'_\ell} | \hat{e}_{I'_{\ell+1}} | \cdots | \hat{e}_{I'_{\ell+m}})$$

$$= (Q_{i_1}[1] * \cdots * Q_{i_p}[1] * [1-p^2])(Q_{i_{p+1}}[1] * \cdots Q_{i_{2p}}[1] * [1-p^2])$$
$$\cdots (Q_{i_{(k-1)p+1}}[1] * \cdots * Q_{i_{kp}}[1] * [1-p^2]) x_{I_1} \cdots x_{I_\ell} \widetilde{Q}_{J_1}(x_{K_1}) \cdots \widetilde{Q}_{J_m}(x_{K_m})$$
$$+ \sum (Q_{i_1}[1] * \cdots * Q_{i_p}[1] * [1-p^2]) \cdots (Q_{i_{(k-1)p+1}}[1] * \cdots * Q_{i_{kp}}[1] * [1-p^2])$$
$$x_{I'_1} \cdots x_{I'_\ell} \widetilde{Q}_{J'_1}(x_{K'_1}) \cdots \widetilde{Q}_{J'_m}(x_{K'_m})$$

を得るが、上の(イ)(ロ)(ニ)を用いれば、

$$d_* \tau_*(e) \equiv x + \sum x_{i_1} \cdots x_{i_{kp}} x_{I'_1} \cdots x_{I'_\ell} x_{I'_{\ell+1}} \cdots x_{I'_{\ell+m}} + \alpha$$
modulo $F_{f(x)+1}$、ここで $f(\alpha) = f(x)$

我々は、$\sum x_{i_1}\cdots x_{i_{kp}} x_{I'_1}\cdots x_{I'_\ell} x_{I'_{\ell+1}}\cdots x_{I'_{\ell+m}}$ が $F_{f(\alpha)+1}$ に入る事を最初に言いたい。そのために、$k$: even と仮定する。この仮定のもとに、$[\sum_{p^k} : S(p^k, p)] \equiv 1 \bmod p$ となり、§1の終りの Kahn-Priddy の(ii')により $\sum e_{i_1}\cdots e_{i_{kp}} e_{I'_1}\cdots e_{I'_\ell} e_{I'_{\ell+1}}\cdots e_{I'_{\ell+m}} = 0$ となる。§1より $H_*(Q_0S^0)$ と $H_*(SG)$ とは algebra として同型だったから $F_{f(\alpha)+1}$ に入るどころか、0になることが言えそうであるが、$I'_j$ が admissible になる保証はないのでそう上手くはいかない。それで、§1の Adem により、weakly admissible の level へ移って行き、(ロ)(い)を用いて $F_{f(\alpha)+1}$ に入ることを示す。後は、$\alpha$ の形を(イ)(ロ)(ニ)を通してよく眺めて、(ほんの少し複雑な)帰納法により $x$ が mod $F_{f(\alpha)+1}$ で $d_*\tau_*$ の像に含まれることが示される。他の形の $x$ についても同様である。

§3. 補題B (reformed 土屋 theorem) の proof の outline;

土屋の argument において、Prop. 4.5 [ ] が first step であったが、証明を見ると実際次を示していることがわかる。

$$\text{⑥}\quad \widetilde{Q}_r(x_I) \equiv \widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1-p^{p\ell(I)}] + x(r, I)$$
$$\bmod\ \xi(I) \cup I^{p+1} \cup I\cdot B.$$

それ故、我々は $\widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1-p^{p\ell(I)}]$ を調べることとなるのだが、$\widetilde{Q}_r Q_I[1]$ については、general distributive law [土2] による次の可換図式が有用である。

$$\begin{tikzcd}
E\Sigma_p \times_{\Sigma_p} \left( E\Sigma_{pl(I)} \times_{\Sigma_{pl(I)}} (Q_1 S^0)^{p^{l(I)}} \right)^p \arrow[r, "E\Sigma_p \times_{\Sigma_p} (\theta_{pl(I)})^p"] \arrow[d, equal] & E\Sigma_p \times_{\Sigma_p} (Q_{pl(I)} S^0)^p \arrow[dd, "\tilde{\theta}_p"] \\
E\Sigma_p \wr \Sigma_{pl(I)} \times_{\Sigma_p \wr \Sigma_{pl(I)}} (Q_1 S^0)^{p^{pl(I)}} \arrow[d] & \\
E\Sigma_{p^{pl(I)}} \times_{\Sigma_{p^{pl(I)}}} (Q_1 S^0)^{p^{pl(I)}} \arrow[r, "\tilde{\theta}_{p^{pl(I)}}"'] & Q_{p^{pl(I)}} S^0
\end{tikzcd}$$

$j : B\Sigma_p \wr \Sigma_{pl(I)} \to B\Sigma_{p^{pl(I)}} \to Q_{p^{pl(I)}} S^0$ を、この図式から得られる写像とすれば、$j_*(e_r \wr e_I) = \tilde{Q}_r Q_I[1]$ となる。ところが、ここで§1の補題(i)を繰り返し使えば、次の重要な結果が得られる。

<u>命題</u> $H = (\mathbb{Z}/p)^{l(I)}$ として、$\underbrace{H \times H \times \cdots \times H}_{p\text{個}}$ を、$\mathbb{Z}_p \times H$-set と思う。ただし、$\mathbb{Z}_p$ は巡回置換として $\underbrace{H \times \cdots \times H}_{p\text{個}}$ に作用し、$H$ は diagonal で作用させる。これを $A(\mathbb{Z}_p \times H)$ の元として $[H^p]$ と書けば、

$\exists x \in H_*(B\mathbb{Z}_p \times H)$ s.t. $\alpha([H^p] + 1 - p^{pl(I)})_* x = \tilde{Q}_r Q_I[1] * [1 - p^{pl(I)}]$

これより、$[H^p] + 1 - p^{pl(I)} \in A(\mathbb{Z}_p \times H)$ がどういうものか興味が持たれるが、それに関しては次の結果がわかる。

<u>命題</u> $1 + I(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$ ($A(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$ の unit group) において

$$[H^p] + 1 - p^{pl(I)} = \coprod_{|K| = p} \left( \frac{\mathbb{Z}_p \times H}{K} + 1 - p^{l(I)} \right) \times \xi^p,$$

(Kは重複も含め、適当に走る)　ここに $\xi \in 1 + I(\mathbb{Z}_p \times H)^\wedge$

§1の $A(G)$ と $QS^0$ の関係、特に(図II)を思い出せば、我々の証明は完了する。

homology が diagonal map でどうなるか注意して、§1の補題(ii)を使えばよい。

References

[P] S. Priddy　Comment. Math. Helv. 53 (1978) 470~484.
[KP1] Kahn-Priddy　Bull. Amer. Math. Soc. 78. (1972) 981~987
[KP2]　〃　Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83 (1978) 91-101
[M] Cohen-Lada-May　L.N.M. 533
[土1] 土屋昭博　Nagoya Math. J. 43 (1971) 1~39
[土2]　〃　J. Math. Soc. Japan 25. (1973) 277~316